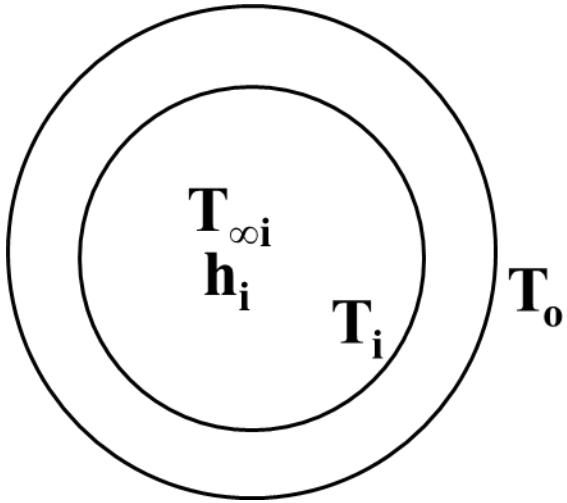
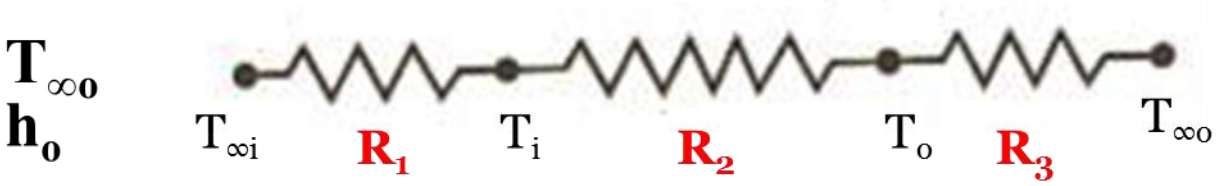
انتقال حرارت ۱

مدرس: نفیسه بینش

اثر جابجایی بر استوانه ساده:

یک استوانه توخالی با شعاع داخلی r_i و شعاع خارجی r_o را در نظر بگیرید که در داخل آن یک سیال با دمای $T_{\infty i}$ و ضریب جایجایی h_i ، و روی سطح خارجی آن یک سیال با دمای $T_{\infty o}$ و ضریب جایجایی h_o جریان دارد.





$$R_1 = \frac{1}{h_i A_i} \; ; \; Ai = 2\pi r_i L$$

$$R_2 = \frac{(\ln \frac{r_o}{r_i})}{2\pi k L}$$

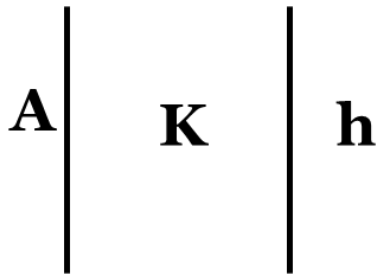
$$R_3 = \frac{1}{h_o A_o} \; ; \; Ao = 2\pi r_o L$$

$$q = \frac{T_{\infty i} - T_{\infty 0}}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{T_{\infty i} - To}{R_1 + R_2} = \dots$$

شعاع بحرانی عایق بندی:

جسمی را در نظر بگیرید که با یک لایه عایق پوشانده شده و با هوای اطراف نیز انتقال حرارت جابجایی انجام می دهد. سوال این است؛ آیا هر چه ضخامت لایه عایق را بیشتر کنیم اتلاف حرارتی را کاهش خواهیم داد. در ادامه به پاسخ این سوال می پردازیم.

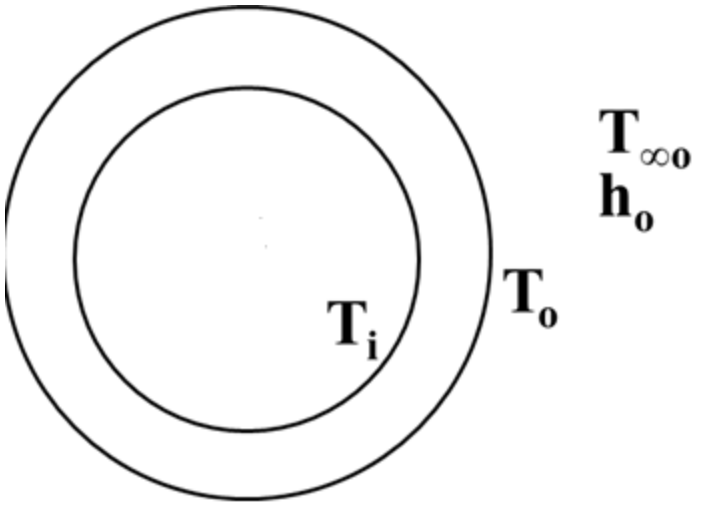
الف) دیواره مسطح (مختصات کارتزین) : در دیواره مسطح مقامت هدایت به صورت $R=L/KA$ بدست آمد. در نتیجه هر چه ضخامت لایه عایق L بیشتر شود، مقاومت بیشتر شده و نرخ اتلاف حرارت کمتر خواهد بود. همچنین مقاومت جابجایی به صورت $R=1/hA$ تعریف شد که با افزایش ضخامت هیچ تغییری نمی کند.



$$R=R_1+R_2=\frac{L}{KA}+\frac{1}{hA}$$

$$L\uparrow : \quad R\uparrow : \quad q\downarrow$$

ب) سیستم استوانه ای

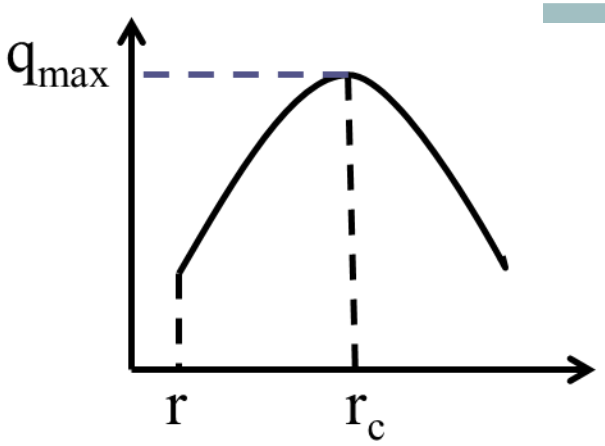


$$R=R_1+R_2=\frac{(\ln\frac{r_o}{r_i})}{2\pi kL}+\frac{1}{h_o A_o}$$

در سیستم استوانه ای با افزایش ضخامت لایه عایق (افزایش r_o) مقاومت هدایت R_1 افزایش و مقاومت جابجایی R_2 کاهش می یابد.

$$r_o \uparrow : \left\{ \begin{array}{lll} \text{Ln}\,(r_o/r_i)\uparrow & : & R_1 \uparrow \\ A_o \uparrow & : & R_2 \downarrow \end{array} \right\} \quad q \quad ???$$

بنابراین یک مقدار بهینه برای ضخامت عایق وجود دارد که به شعاع بحرانی عایق بندی موسوم است که باید تعیین شود.



اگر d ضخامت لایه عایق، r شعاع لوله و r_c شعاع بحرانی تعیین شده باشد:

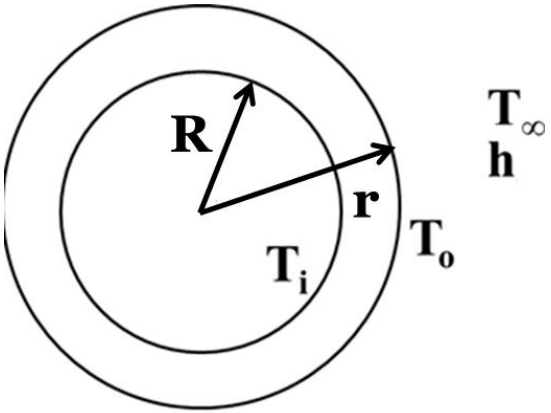
$(r + d) < r_c \Rightarrow$ با افزایش ضخامت لایه عایق اتلاف بیشتر خواهد شد

$(r + d) > r_c \Rightarrow$ با افزایش ضخامت لایه عایق اتلاف کمترخواهد شد

در r_c بیشترین اتلاف را خواهیم داشت

برای تعیین شعاع بحرانی عایق بندی به صورت زیر عمل می کنیم:

استوانه ای به شعاع R را در نظر بگیرید که با یک لایه عایق به شعاع r پوشانده شده است.



از نمودار صفحه قبل مشخص است که در شعاع بحرانی نقطه ماکزیمم وجود دارد. یعنی در شعاع بحرانی مشتق q بر حسب r باید صفر باشد.

$$q=\frac{T_i-T_\infty}{\frac{(\ln\frac{r}{R})}{2\pi kL}+\frac{1}{2\pi rlh}}\cdot\frac{2\pi lk}{2\pi lK}$$

$$q=\frac{2\pi lk(T_i-T_\infty)}{\ln r-\ln R+\frac{k}{rh}}$$

$$q = \frac{2\pi lk(T_i - T_\infty)}{\ln r - \ln R + \frac{k}{rh}}$$

$$\frac{dq}{dr} = 0 \longrightarrow \frac{-2\pi lk(T_i - T_\infty)\left(\frac{1}{r} - \frac{k}{hr^2}\right)}{\left(\ln r - \ln R + \frac{k}{rh}\right)^2} = 0$$

$$\longrightarrow \frac{1}{r} - \frac{k}{hr^2} = 0 \longrightarrow \frac{1}{r} = \frac{k}{hr^2} \longrightarrow 1 = \frac{k}{hr}$$

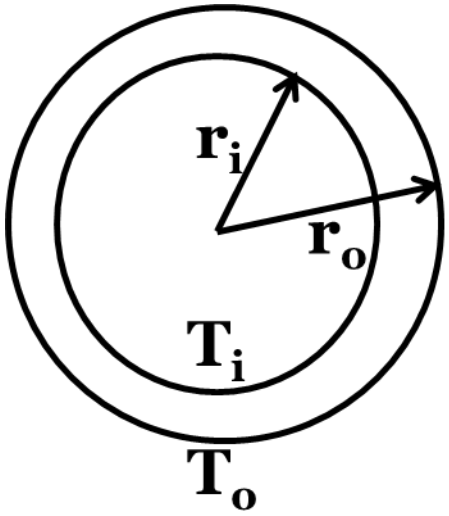
$$\longrightarrow \boxed{r_c = \frac{k}{h}}$$

شعاع بحرانی عایق بندی در استوانه

۳-۱: هدایت پایدار یک بعدی بدون چشمه حرارتی

۳-۱-۳: مختصات کروی

الف) پوسته ساده کروی



هدف:

۱. معادله توزیع دما در دیواره کره

۲. شدت حرارت منتقل شده

$$\frac{1}{\alpha}\frac{dT}{dt} = \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} + \frac{\dot{q}}{K}$$

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(\mathrm{r}\,T) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{d(rT)}{dr}\right) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\mathrm{T} + \mathrm{r}\frac{dT}{dr}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{dT}{dr} + \frac{dT}{dr} + \mathrm{r}\frac{d^2T}{dr^2}\right) =$$

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} \quad (2)$$

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(\mathrm{r}T) = \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} \quad (2)$$

$$\longrightarrow \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(\mathrm{r}T) = 0$$

$$\longrightarrow \frac{d^2}{dr^2}(\mathrm{r}T) = 0 \longrightarrow \frac{d}{dr}(\mathrm{r}T) = \mathrm{C}_1 \longrightarrow \mathrm{rT} = \mathrm{C}_1\mathrm{r} + \mathrm{C}_2$$

$$\longrightarrow T = C_1 + \frac{C_2}{r}$$

$$r=r_i \rightarrow T=T_i \rightarrow T_i = C_1 + \frac{C_2}{r_i}$$

$$r=r_o \rightarrow T=T_o \rightarrow T_o = C_1 + \frac{C_2}{r_o}$$

$$\longrightarrow \quad T_i = C_1 + \frac{C_2}{r_i}$$

$$-T_o = -C_1 - \frac{C_2}{r_o}$$

$$\longrightarrow \quad T_i - T_o = C_2\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}\right) \longrightarrow \boxed{C_2 = \frac{T_i - T_o}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}}}$$

$$T_i = C_1 + \frac{C_2}{r_i} \longrightarrow C_1 = T_i - \frac{C_2}{r_i} \longrightarrow \boxed{C_1 = T_i - \frac{T_i - T_o}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}} \cdot \frac{1}{r_i}}$$

$$T = T_i - \frac{T_i - T_o}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}} \cdot \frac{1}{r_i} + \frac{T_i - T_o}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\boxed{T = T_i - \frac{T_i - T_o}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r}\right)}$$

معادله توزیع دما سیستم کروی

محاسبه شدت انتقال حرارت

$$q = -KA\frac{dT}{dr}$$

$$T = T_i - \frac{T_i - T_o}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r}\right) \longrightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{T_i - T_o}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$A = 4\pi r^2$$

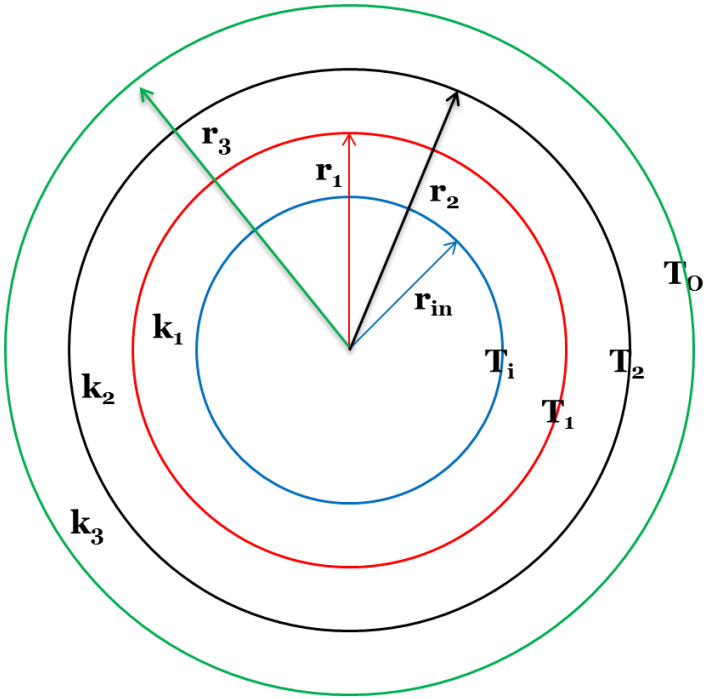
$$\longrightarrow q = 4k\pi r^2\left(\frac{T_i - T_o}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}} \cdot \frac{1}{r^2}\right) \longrightarrow q = 4k\pi\left(\frac{T_i - T_o}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}}\right)$$

$$q = \frac{T_i - T_o}{R} \quad ; R = \frac{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}}{4k\pi} = \frac{r_o - r_i}{4k\pi r_i r_o}$$

شدت انتقال حرارت

ب) پوسته های مرکب کروی:

کره ای که دمای سطح آن T_i و شعاع آن r_i است، با چندین لایه عایق که شعاع آنها به ترتیب r_1 ، r_2 ، ...، r_n و ضریب هدایت هرکدام به ترتیب k_1، k_2 ، و ... و k_n است، پوشانده شده است. حال میخواهیم حرارت منتقل شده و دمای سطح مشترک لایه های عایق را محاسبه کنیم.

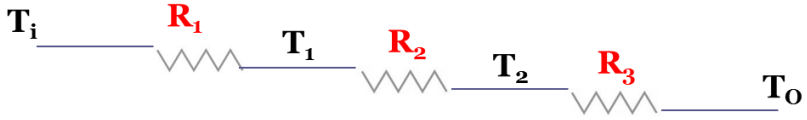


$$q_t = \frac{T_i - To}{R_t} \qquad R_t = R_1 + R_2 + R_3$$

$$R_1 = \frac{r_1 - r_i}{4k_1\pi r_1 r_i}$$

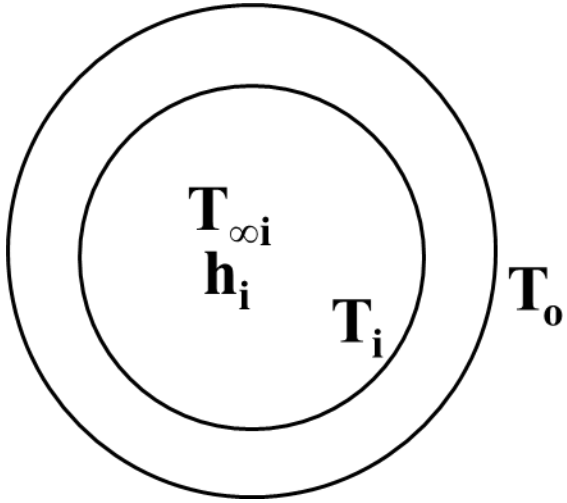
$$R_2 = \frac{r_2 - r_1}{4k_2\pi r_1 r_2}$$

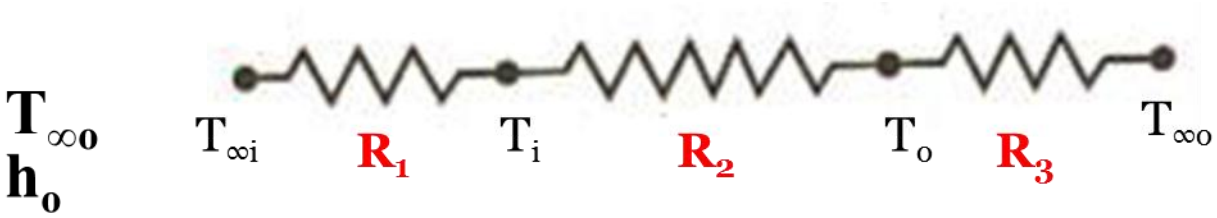
$$R_3 = \frac{r_3 - r_2}{4k_3\pi r_2 r_3}$$



اثر جابجایی بر پوسته کروی ساده:

یک پوسته کروی با شعاع داخلی r_i و شعاع خارجی r_o را در نظر بگیرید که در داخل آن یک سیال با دمای $T_{\infty i}$ و ضریب جابجایی h_i ، و روی سطح خارجی آن یک سیال با دمای $T_{\infty o}$ و ضریب جابجایی h_o جریان دارد.





$$R_1 = \frac{1}{h_i A_i} \; ; \; Ai = 4\pi {r_i}^2$$

$$R_2 = \frac{r_o - r_i}{4k\pi r_i r_o}$$

$$R_3 = \frac{1}{h_o A_o} \; ; \; A_o = 4\pi {r_o}^2$$

$$q = \frac{T_{\infty i} - T_{\infty 0}}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{T_{\infty i} - T_o}{R_1 + R_2} = \dots$$

شعاع بحرانی عایق بندی در سیستم کروی:

اثبات می شود که در سیستم کروی شعاع بحرانی از رابطه $r_c=2k/h$ تعیین می شود.

نمره مثبت: رابطه شعاع بحرانی در سیستم کروی را اثبات کنید.

جمع بندی :

در هدایت پایای یک بعدی بدون چشمه حرارتی: $q=\frac{T_1-T_2}{R}$

- در مختصات کارتزین (دیواره): $\mathbf{R}=\frac{L}{KA}$
- در مختصات استوانه ای : $\mathbf{R}=\frac{(\ln\frac{r_o}{r_i})}{2\pi kL}$
- در مختصات کروی : $\mathbf{R}=\frac{r_o-r_i}{4k\pi r_i r_o}$